

Эргодические гомоклинические группы, сидоновские конструкции и пуассоновские надстройки

В.В. Рыжиков

Аннотация

Предложены новые примеры перемешивающих преобразований на пространстве с бесконечной мерой: так называемые сидоновские конструкции ранга 1. Для класса бесконечных преобразований получено быстрое убывание корреляций, недавно обнаруженное А.А. Приходько для динамических систем с простым спектром, действующих в на вероятностном пространстве. Получен положительный ответ на вопрос М.И. Гордина о существовании преобразований с нулевой энтропией и эргодическим гомоклиническим потоком. Рассмотрены модификации сидоновских конструкций, индуцирующие пуассоновские надстройки с простым сингулярным спектром и гомоклиническим бернуллиевским потоком. Дано новое доказательство теоремы Э. Руа о кратном перемешивании пуассоновских надстроек.

УДК 517.987. MSC: Primary 28D05; Secondary 58F11.

Ключевые слова: Эргодические действия, конструкция ранга один, множество Сидона, кратное перемешивание, пуассоновская надстройка, гомоклинические преобразования, сингулярный спектр.

1 Введение

Эргодическая теория сохраняющих меру преобразований изучает действия на вероятностном пространстве и действия на пространстве с сигма-конечной инвариантной мерой. Последние для краткости будем называть бесконечными а фазовое пространство (X, μ) , $\mu(X) = \infty$, предполагается изоморфным прямой с мерой Лебега.

Пуассоновская мера μ_* на пространстве конфигураций X_* (см. [4], [6], [10]) индуцирует непрерывное вложение группы $Aut(\mu)$ всех сохраняющих меру μ обратимых преобразований в группу $Aut(\mu_*)$. Свойство перемешивания для бесконечного преобразования T означает

$$\mu(T^n A \cap B) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для любых множеств A, B конечной меры. Оно влечет за собой свойство перемешивания пуассоновской надстройки T_* :

$$\mu_*(T_*^n V \cap W) \rightarrow \mu_*(V)\mu_*(W), \quad n \rightarrow \infty,$$

для измеримых множеств $V, W \subset X_*$ $n \rightarrow \infty$.

Как мы увидим, среди пуассоновских надстроек только перемешивающие обладают так называемыми гомоклиническими эргодическими группами. Следуя М.И. Гордину [2], определим гомоклиническую группу $H(T)$ преобразования T :

$$H(T) = \{S : T^n S T^{-n} \rightarrow Id, n \rightarrow \infty\}.$$

Если фазовое пространство X имеет бесконечную меру, а преобразование $T : X \rightarrow X$ перемешивает, то группа F всех сохраняющих меру преобразований S с носителем конечной меры, $\mu(supp(S)) < \infty$, лежит в группе $H(T)$. Группа F_* лежит в $H(T_*)$ и является эргодической.

В [2] установлен замечательный факт: эргодичность гомоклинической группы автоморфизма вероятностного пространства влечет за собой свойство перемешивания. Мы обобщим его результат на свойство кратного перемешивания. Это позволяет дать новое доказательство теоремы Э.Руа о кратном перемешивании перемешивающих пуассоновских надстроек. Тем самым в классе пуассоновских надстроек будет установлена эквивалентность свойств перемешивания, кратного перемешивания всех порядков, эргодичности гомоклинической группы. Напомним, что перемешивание кратности 2 означает при $m, n \rightarrow \infty$ выполнение

$$\mu_*(U \cap T_*^m V \cap T_*^{m+n} W) \rightarrow \mu_*(U)\mu_*(V)\mu_*(W).$$

Возникает вопрос: у каких перемешивающих действий нет эргодических гомоклинических групп? В силу сказанного примером является перемешива-

ющее, но не кратно перемешивающее действие Ледраппье [7]. Орициклический поток не обладает гомоклиническими элементами (кроме тождественного), что можно вывести из теоремы М. Ратнер о равномерном распределении орбит [9]. Интересно узнать, бывают ли преобразования, не являющиеся элементом некоторой гомоклинической группы (в качестве кандидата можно предложить эргодический поворот окружности).

Для перемешивающих преобразований вероятностного пространства, имеющих положительный локальный ранг (определение см. в [11]) можно показать, что гомоклиническая группа конечна, следовательно, она не может быть эргодической. *Для перемешивающих преобразований ранга 1 гомоклиническая группа состоит из тождественного преобразования.* Можно заметить, что любое бесконечное декартово произведение является элементом гомоклинической группы бернуллиевского автоморфизма с бесконечной энтропией. Однако не очевидно, что существует преобразование с нулевой энтропией, для которого бернуллиевский автоморфизм является гомоклиническим элементом.

М.И. Гордин поставил вопрос о существовании преобразования с нулевой энтропией и эргодической гомоклинической группой. Положительный ответ дал Дж. Кинг в [5]. Наша статья содержит другие примеры: оказывается, что все перемешивающие пуассоновские надстройки, в том числе и с нулевой энтропией¹, обладают эргодической гомоклинической группой.

Может ли преобразование с нулевой энтропией обладать эргодическим гомоклиническим потоком? Пример Кинга не дал ответа на этот вопрос. Мы покажем, что найдется пуассоновская надстройка T_* с простым (и, следовательно, сингулярным) спектром и гомоклинической группой $H(T_*)$, содержащей бернуллиевский поток.

Спектр пуассоновской надстройки T_* полностью определен спектром преобразования T , поскольку T_* как унитарный оператор изоморфен оператору $\exp(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^{\odot n}$, где $T^{\odot 0} = 1$ – одномерный тождественный оператор, $T^{\odot n}$ – симметрическая тензорная степень оператора T . Если спектр T_* простой,

¹Е. Janvresse, Т. Meyerovitch, Е. Roy, Т. de la Rue в работе "Poisson suspensions and entropy for infinite transformations" Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 3069-3094, доказали, что пуассоновские надстройки, индуцированные преобразованиями ранга один, имеют нулевую энтропию.

то он сингулярный. Энтропия таких надстроек равна нулю, так как преобразования с положительной энтропией обладают счетнократной лебеговской компонентой в спектре.

В построении подходящего бесконечного преобразования T методом работы [11] добиваемся простоты спектра $\exp(T)$, при этом обеспечиваем наличие в группе $H(T)$ диссипативного элемента S . Тогда пуассоновская надстройка T_* будет обладать бернуллиевским гомоклиническим элементом S_* .

В статье будут использованы так называемые сидоновские конструкции бесконечных преобразований ранга 1. Свойство перемешивания для них вытекает из определения, а специфика конструкций позволяет строить диссипативные гомоклинические элементы. Сидоновские конструкции интересны и тем, что они позволяют получить бесконечные преобразования с простым спектром и быстрым убыванием корреляций. Аналогичный эффект в случае вероятностного фазового пространства впервые был обнаружен А.А. Приходько [8]. В связи с новой теорией типичных перемешивающих преобразований (см. недавние работы [1],[12]) было бы интересно узнать, какие типичные свойства имеются у бесконечных перемешивающих преобразований.

Автор благодарит М.И. Гордина, Э. Руа и Ж.-П. Туveno за вопросы, обсуждения и полезные замечания.

2 Конструкции преобразований ранга один

Сохраняющее меру обратимое преобразование $T : X \rightarrow X$ пространства Лебега (X, μ) имеет ранг 1, если существует последовательность ξ_j измеримых разбиений пространства X таких, что

$$\xi_j = \{E_j, TE_j, T^2E_j, \dots, T^{h_j}E_j, \tilde{E}_j\}$$

и ξ_j стремится к разбиению на точки. Набор "этажей" (или "блоков")

$$E_j, TE_j, T^2E_j, \dots, T^{h_j}E_j$$

называется башней. Также башней называют дизъюнктивное объединение $X_j = \bigsqcup_{z=0}^{h_j} T^z E_j$. В этом определении мера пространства может быть как конечной, так и бесконечной. Мера множества $\tilde{E}_j = X \setminus X_j$ стремится к 0 в случае конечной меры и равна бесконечности в случае $\mu(X) = \infty$.

Конструкция преобразования ранга 1 Фиксируем $h_1 \geq 1$ (высота башни на этапе 1), последовательность $r_j \rightarrow \infty$ (число колонн, в общем случае требуют только $r_j \geq 2$) и последовательность целочисленных векторов

$$\bar{s}_j = (s_j(1), s_j(2), \dots, s_j(r_j - 1), s_j(r_j)).$$

Ниже мы даем описание конструкции, которая полностью определена параметрами h_1, r_j, \bar{s}_j .

На шаге $j = 1$ задан интервал E_1 . Пусть на шаге j определена система (башня) непересекающихся интервалов

$$E_j, TE_j, T^2E_j, \dots, T^{h_j-1}E_j,$$

причем на $E_j, TE_j, \dots, T^{h_j-2}E_j$ преобразование T является параллельным переносом.

Теперь переходим к шагу с номером $j + 1$. Представим интервал E_j как дизъюнктивное объединение r_j интервалов одинаковой меры, т. е.

$$E_j = E_j^1 \sqcup E_j^2 \sqcup E_j^3 \sqcup \dots \sqcup E_j^{r_j}.$$

Для $i = 1, 2, \dots, r_j$ рассмотрим набор (колонну) $E_j^i, TE_j^i, T^2E_j^i, \dots, T^{h_j-1}E_j^i$ (i -ая колонна на этапе j). Над каждой колонной с номером i добавим $s_j(i)$ интервалов меры $\mu(E_j^i)$ (новые блоки в башне этапа $j + 1$), получая набор

$$E_j^i, TE_j^i, T^2E_j^i, \dots, T^{h_j-1}E_j^i, T^{h_j}E_j^i, T^{h_j+1}E_j^i, \dots, T^{h_j+s_j(i)-1}E_j^i$$

(все множества не пересекаются). Обозначив $E_{j+1} = E_j^1$, для всех $i < r_j$ положим $T^{h_j+s_j(i)}E_j^i = E_j^{i+1}$. Таким образом, колонны складываются в одну новую башню

$$E_{j+1}, TE_{j+1}, T^2E_{j+1}, \dots, T^{h_{j+1}-1}E_{j+1},$$

где

$$h_{j+1} = h_j r_j + \sum_{i=1}^{r_j} s_j(i).$$

Продолжая построение, получим в качестве фазового пространства X объединение всех интервалов и обратимое преобразование T на X . Мера пространства бесконечна, если расходится ряд

$$\sum_j \frac{s_j(1) + s_j(2) + \dots + s_j(r_j)}{h_j r_j}.$$

Хорошо известно, что преобразование ранга 1 является эргодическим и имеет простой спектр. (Простота спектра бесконечного преобразования в общем случае не влечет за собой эргодичность.)

3 Сидоновские конструкции и быстрое убывание корреляций.

В этом параграфе будут рассмотрены конструкции ранга 1 со специальными надстройками. Такие преобразования замечательны тем, что их свойство перемешивания легко вытекает из определения, более того, перемешивание может быть быстрым.

Сидоновские конструкции. Пусть $r_j \rightarrow \infty$ и на каждом шаге j выполнено

$$h_j \ll s_j(1) \ll s_j(2) \ll \dots \ll s_j(r_j - 1) \ll s_j(r_j) \quad (*).$$

Тогда для фиксированных ξ_{j_0} -измеримых множеств $A, B \subset X_{j_0}$ выполняется

$$\mu(A \cap T^m B) \leq \mu(A)/r_j$$

для всех $m \in [h_j, h_{j+1}]$, $j > j_0$. Таким образом, для всех множеств A, B конечной меры

$$\mu(A \cap T^m B) \rightarrow 0.$$

Такая конструкция обладает *свойством Сидона*: пересечение $X_j \cap T^m X_j$ при $h_j < m \leq h_{j+1}$ может содержаться только в одной колонне башни X_j (будем считать сказанное определением сидоновской конструкции). Очевидно, что сидоновская конструкция является перемешивающей при $r_j \rightarrow \infty$.

Оптимальные сидоновские конструкции. Пусть задана последовательность $N_j \rightarrow \infty$. (Отметим, что последовательность N_j не обязана быть заданной заранее, а может определяться шаг за шагом в ходе построения преобразования.) В целочисленном интервале $\{1, 2, \dots, N_j\}$, как известно, найдется сидоновское множество \mathbf{S}_j максимальной мощности, близкой к $\sqrt{N_j}$. Напомним, что множество Сидона \mathbf{S}_j по определению удовлетворяет уловию: при $m > 0$ пересечение $\mathbf{S} \cap (\mathbf{S} + m)$ содержит не более одного элемента. Обозначим элементы множества \mathbf{S}_j через $S_j(0), S_j(1), \dots, S_j(r_j)$, считая, что $S_j(0) < S_j(1) < \dots < S_j(r_j)$. Положим $r_j = |\mathbf{S}_j| - 1$ и

$$s_j(i) = h_j (S_j(i) - S_j(i-1) - 1), \quad i = 1, 2, \dots, r_j.$$

Такая конструкция является сидоновской, а ее особенностью является минимальность надстроек.

Теорема 3.1. *Для любой функции $\psi(m) \rightarrow \infty$ (ее рост может быть сколь угодно медленным) такой, что последовательность $\frac{\psi(m)}{\sqrt{m}}$ монотонно стремится к 0, для некоторой оптимальной сидоновской конструкции T для плотного семейства множеств A (плотного в классе всех множеств конечной меры) выполнено условие быстрого убывания корреляций*

$$\mu(A \cap T^m A) \leq C \frac{\psi(m)}{\sqrt{m}},$$

где константа C зависит от множества A .

Доказательство. На шаге j определим r_j условием $\psi(h) \geq \sqrt{h_j}$ для всех $h > r_j^2$. Положим $N_j = r_j^2$. Как было описано выше, найдем $s_j(i)$, $i = 1, 2, \dots, r_j$, отвечающие оптимальной сидоновской конструкции. Получим

$$h_{j+1} \sim h_j N_j = h_j r_j^2,$$

$$\frac{\sqrt{h_j}}{\psi(h_{j+1})} \leq 1.$$

Из монотонности $\frac{\psi(m)}{\sqrt{m}}$ для $m \in [h_j + 1, h_{j+1}]$ имеем

$$\frac{\psi(h_{j+1})}{\sqrt{h_{j+1}}} \leq \frac{\psi(m)}{\sqrt{m}}.$$

Тогда для всех $m \in [h_j + 1, h_{j+1}]$ и множества A , состоящего из набора этажей некоторой башни X_{j_0} выполняется

$$\mu(A \cap T^m A) \leq \frac{\mu(A)}{r_j} \leq C \frac{\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_{j+1}}} = C \frac{\psi(h_{j+1})}{\sqrt{h_{j+1}}} \frac{\sqrt{h_j}}{\psi(h_{j+1})} \leq C \frac{\psi(m)}{\sqrt{m}}.$$

Осталось заметить, что такие множества A всюду плотны в классе всех множеств конечной меры.

4 Кратное перемешивание, гомоклинические группы и пуассоновские надстройки.

Следуя [2], определим гомоклиническую группу $H(T)$ преобразования T , положив

$$H(T) = \{S \in \text{Aut}(X, \mu) : T^n S T^{-n} \rightarrow Id, n \rightarrow \infty\}.$$

М. Гордин [2] доказал свойство перемешивания автоморфизма T вероятностного пространства в случае, когда группа $H(T)$ является эргодической. Мы усилим этот результат. Автоморфизм T вероятностного пространства обладает перемешиванием кратности 2, если для любых измеримых множеств A, B, C при $m, n \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mu(A \cap T^m B \cap T^{m+n} C) \rightarrow \mu(A)\mu(B)\mu(C).$$

Аналогично определяется перемешивание кратности $n > 2$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Автоморфизм вероятностного пространства с эргодической гомоклинической группой обладает перемешиванием любой кратности.*

Теорема очевидным образом вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.2. *Пусть R_i и T_i – последовательности автоморфизмов вероятностного пространства. Пусть для автоморфизма S выполнено*

$$R_i^{-1} S R_i \rightarrow Id, \quad T_i^{-1} S T_i \rightarrow Id.$$

(i) *Если для некоторой меры ν на произведении $X \times X \times X$ для всех измеримых множеств A, B, C выполнено*

$$\mu(A \cap R_i B \cap T_i C) \rightarrow \nu(A \times B \times C),$$

то

$$\nu(SA \times B \times C) = \nu(A \times B \times C).$$

(ii) *Пусть $\nu(SA \times B \times C) = \nu(A \times B \times C)$ для всех $S \in H(T)$, а группа $H(T)$ эргодическая. Если выполнено $\nu(X \times B \times C) = \mu(B)\mu(C)$ для любых измеримых B, C , то $\nu = \mu \times \mu \times \mu$.*

Доказательство леммы. (i) Имеем цепочку равенств

$$\nu(A \times B \times C) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A \cap R_i B \cap T_i C) =$$

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(SA \cap R_i R_i^{-1} S R_i B \cap T_i T_i^{-1} S T_i C) = \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(SA \cap R_i B \cap T_i C) = \nu(SA \times B \times C). \end{aligned}$$

(ii) Мера ν является присоединением (joining) эргодического действия $H(T)$ на пространстве $X_{(1)}$ и тождественного действия на пространстве $X_{(2)} \times X_{(3)}$. Хорошо известно, что в этом случае ν является прямым произведением проекций меры ν на указанные пространства, т. е. $\nu = \mu \times (\mu \times \mu)$.

Лемма 4.3. *Если фазовое пространство имеет бесконечную меру, а преобразование T перемешивает, то группа F всех преобразований S с носителем конечной меры, $\mu(\text{supp}(S)) < \infty$, лежит в группе $H(T)$.*

Доказательство. Для любого множества A конечной меры выполнено

$$\mu(A \cap \text{supp}(T^{-n} S T^n)) \rightarrow 0 < \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

в силу свойства перемешивания преобразования T . Следовательно,

$$T^{-n} S T^n \rightarrow Id.$$

Пуассоновские надстройки. Фиксируем пространство (X, μ) с бесконечной мерой. На пространстве X_* конфигураций, т. е. счетных подмножеств пространства X , вводится пуассоновская мера μ_* . Она определена условием: для любого набора множеств $A_i \subset X$, $i = 1, \dots, N$, конечной меры выполнено

$$\mu_*\{x_* : |x_* \cap A_i| = n_i, \quad i = 1, \dots, N\} = \prod_{i=1}^N \frac{e^{-\mu(A_i)} \mu(A_i)^{n_i}}{(n_i)!}.$$

Пусть T – автоморфизм пространства (X, μ) . Пуассоновской надстройкой называется преобразование

$$T_*(\{x_k\}) = \{(Tx)_i\}.$$

Надстройка T_* сохраняет вероятностную меру μ_* . Сопоставление $T \rightarrow T_*$ осуществляет непрерывное вложение $\text{Aut}(X, \mu)$ в $\text{Aut}(X_*, \mu_*)$.

Теорема 4.4. ([10]) *Перемешивающие пуассоновские надстройки обладают перемешиванием всех порядков.*

Доказательство. Для бесконечного перемешивающего преобразования T группа $F = \{S : \mu(\text{supp}(S)) < \infty\}$, лежит в группе $H(T)$ (лемма 4.3).

Пуассоновская надстройка F_* , является эргодической группой, так как ее замыкание содержит всевозможные T_* . Последнее есть следствие того, что замыкание F содержит все автоморфизмы T пространства (X, μ) . Осталось заметить, что F_* гомоклиническая относительно T_* и применить теорему 4.1.

5 Пуассоновская надстройка с сингулярным спектром и гомоклиническим бернуллиевским потоком

Рассмотрим следующий вопрос: *может ли автоморфизм с нулевой энтропией обладать гомоклиническим эргодическим потоком?* Мы найдем пуассоновскую надстройку с нужными свойствами.

Утверждение 5.1. *Существует пуассоновская надстройка с сингулярным спектром, обладающая бернуллиевским гомоклиническим потоком.*

Возьмем перемешивающий автоморфизм R бесконечного пространства такой, что R_* имеет простой, следовательно, и непрерывный сингулярный спектр. Примеры имеются в работе [3]. Для их построения можно также воспользоваться сидоновскими конструкциями. Добавляя в сидоновскую конструкцию неперемешивающую специальную часть по аналогии с [3], [11], добиваемся простоты спектра оператора $\exp(R)$. Уменьшая неперемешивающую часть, сохраняем простоту спектра $\exp(R)$, но получаем свойство перемешивания:

$$\mu(A \cap R^m B) \leq \varepsilon_j + \mu(A)/r_j,$$

где оценка $\varepsilon_j \rightarrow 0$ отвечает исчезающей неперемешивающей части. Свойство перемешивания для таких модифицированных сидоновских R не требует доказательства и вытекает из определения.

На пространстве $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ рассмотрим преобразование

$$T(x, y) = (x, R(y)).$$

Пусть поток S_t на X задан равенством

$$S^t(x, y) = (x + \varphi(y)t, y),$$

где $\varphi > 0$ и $\varphi(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Поток является диссипативным и гомоклиническим по отношению к T . Первое очевидно, а второе несложно установить.

Действительно, для функций вида $f = \chi_{[a,b] \times [c,d]}$ выполнено

$$\|f - T^{-n} S^t T^n f\|_2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как при фиксированном t преобразование $T^n S^t T^{-n}$ на полосе $X = \mathbf{R} \times [c, d]$ близко к тождественному преобразованию. Это видно из формулы

$$T^{-n} S^t T^n(x, y) = (x + \varphi(R^n(y))t, y)$$

и того, что в силу перемешивания для большинства $y \in [c, d]$ величина $R^n(y)$ велика, но $\varphi(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$, поэтому величина $\varphi(R^n(y))$ будет мала. Из сказанного вытекает, что $T^{-n} S^t T^n \rightarrow Id$ при $n \rightarrow \infty$.

Пуассоновская надстройка S_*^t является бернуллиевским потоком (S^t – диссипативный поток), гомоклиническим относительно T_* . Спектр надстройки T_* сингулярный: мера максимального спектрального типа совпадает со спектром преобразования R_* , а кратность спектра надстройки T_* бесконечна. Утверждение доказано.

В следующем параграфе предлагается другой способ построения гомоклинических действий.

6 Пуассоновские надстройки с простым спектром и бернуллиевским гомоклиническим потоком

Сейчас мы опишем конструкцию T ранга 1, которая имеет в качестве одного из гомоклинических элементов диссипативное преобразование S . Напомним, что диссипативность означает существование такого измеримого множества Y , что

$$X = \bigsqcup_{z \in \mathbf{Z}} S^z Y.$$

Лемма 6.1. Пусть для некоторого автоморфизма S и конструкции T ранга 1 выполнено

$$\min\{\mu(ST^n T^k E_j \mid T^n T^k E_j) : 0 \leq k \leq h_j, h_j \leq n \leq h_{j+1}\} \rightarrow 1$$

при $j \rightarrow \infty$. Тогда преобразование S является гомоклиническим относительно T .

Доказательство. Фиксируем множество, состоящее из объединения некоторых блоков некоторой башни нашей конструкции на этапе j_0 . Для всех $j > j_0$ множество A является объединением блоков вида $T^k E_j$. Пусть $h_j \leq n \leq h_{j+1}$. Так как $T^n A$ является объединением некоторых множеств вида $T^n T^k E_j$, а последние мало отличаются от $ST^n T^k E_j$, получаем, что $T^n A$ мало отличается от $ST^n A$. Это означает, что $T^{-n} ST^n A$ асимптотически совпадает с множеством A . Автоморфизм S является гомоклиническим.

Преобразования S и T , удовлетворяющие условиям леммы 6.1. Пусть T – сидоновская конструкция. При $h_j \leq n \leq h_{j+1}$ образ блока $T^k E_j$ под действием T^n будет в основном состоять из надстроек этапов $j+1$ и $j+2$, за исключением множества, попадающего в башню этапа j . Мера этого множества не превосходит величины $\frac{\mu(E_j)}{r_j}$.

В качестве S выбираем преобразование такое, что для некоторой последовательности $\varepsilon_j \rightarrow \infty$ выполнено

$$\mu(ST^m E_{j+1} \mid T^m E_{j+1}) > 1 - \varepsilon_j$$

при условии, что указанный блок $T^m E_{j+1}$ не лежит в башне X_j . Тогда образ блока $T^k E_j$ под действием T^n будет в основном состоять из таких (новых) блоков в силу свойства Сидона нашей конструкции.

Построение диссипативного преобразования S . Пространство X является дизъюнктивным объединением X_1 и множеств $X_j \setminus X_{j+1}$. Последние состоят из так называемых новых блоков. Занумеруем их в порядке построения и обозначим через D_k .

Фиксируем последовательность $s_k \rightarrow \infty$ такую, чтобы выполнялось

$$\sum_k \frac{\mu(D_k)}{s_k} = \infty.$$

Разобьем каждый блок на D_k на s_k интервалов $B_k^1, B_k^2, \dots, B_k^{s_k}$ одинаковой меры. Зададим преобразование \tilde{S} , циклически переставляющее указанные интервалы внутри блока так, что \tilde{S}^{s_k} является тождественным на D_k .

На объединении $\sqcup_k B_k^1$, мера которого бесконечна, рассмотрим некоторое диссипативное преобразование P . Продолжим P на все пространство X , считая его тождественным вне объединения $\sqcup_k B_k^1$. Преобразование $S = P\tilde{S}$ будет

диссипативным (блуждающее множество преобразования P является блуждающим для S). По построению, преобразование S удовлетворяет свойству $\mu(SD_k | D_k) \rightarrow 1, s \rightarrow \infty$. Образ этажа $T^k E_j$ ($0 \leq k \leq h_j$) под действием T^n ($n > h_j$) в основном будет состоять из таких $D_{k'}$, что значения всех таких k' растут при $j \rightarrow \infty$. Теперь можно применить лемму 6.1. Получим, что S является гомоклиническим относительно сидоновской конструкции T .

Отметим, что построение диссипативного преобразования S не зависит от свойств конструкции T . Но для сидоновской конструкции T такое преобразование оказывается гомоклиническим. В этом случае можно применить лемму, так как при $h_j \leq n \leq h_{j+1}$ образ блока $T^k E_j$ под действием T^n лежит в объединении некоторых новых блоков из $X \setminus X_j$, за исключением асимптотически пренебрежимого множества.

Модификация сидоновской конструкции. Рассмотрим конструкцию T_ε , которая отличается от сидоновской тем, что на объединении колонн с номерами i , $(1 - \varepsilon)r_j < i \leq r_j$ не требуется выполнения свойства Сидона. При этом можно обеспечить наличие слабых пределов степеней преобразования, что в свою очередь влечет за собой простоту спектра оператора $\exp(T_\varepsilon)$. Методом, изложенным в [11], доказывалось существование перемешивающей конструкции T , являющейся пределом таких конструкций T_{ε_k} , $\varepsilon_k \rightarrow 0$, и наследующей свойство простоты спектра $\exp(T)$. Аналогичная задача, но для другого класса бесконечных преобразований была решена в [3]. Построенное выше преобразование S будет гомоклиническим относительно T . Очевидно, что S вкладывается в диссипативный поток, который является гомоклиническим относительно T . Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Существует перемешивающая пуассоновская надстройка с простым сингулярным спектром, обладающая бернуллиевским гомоклиническим потоком.*

Замечание. Интересно узнать, всегда ли перемешивающая пуассоновская надстройка обладает бернуллиевским гомоклиническим элементом. Вероятно, можно доказать, что *существует пуассоновская надстройка T_* с простым спектром такая, что для любой пуассоновской надстройки R_* гомоклиническая группа $H(T_*)$ содержит элемент, сопряженный с R_* (универ-*

сальность группы $H(T_*)$). Для этого достаточно установить универсальность $H(T)$ для модифицированной сидоновской конструкции T .

Список литературы

- [1] Баштанов А.И. Типичное перемешивание имеет ранг 1. Матем. заметки, 93:2 (2013), 163-171
- [2] Гордин М. И. Гомоклиническая версия центральной предельной теоремы. Исследования по математической статистике. 9, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 184, 1990, 80–91 (M.I.Gordin. A homoclinic version of the central limit theorem. J. Math. Sci. **68** (1994) 451-458).
- [3] Danilenko A.I., Ryzhikov V.V. Mixing constructions with infinite invariant measure and spectral multiplicities. Ergod. Th. Dynam. Sys., 31:3 (2011), 853-873.
- [4] Исмагилов Р.С. Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства R^n , $n \geq 2$. Матем. сб. 98:1 (1975). 55-71
- [5] King J.L. On M. Gordin's homoclinic question. IMRN International Mathematics Research Notices (1997). No. 5, 203-212.
- [6] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [7] Ledrappier F. Un champ marcovien peut etre d'entropie null et melangeant. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A, 287 (1978), 561-563
- [8] Приходько А.А. Эргодические автоморфизмы с простым спектром и свойством быстрого убывания корреляций. Матем. заметки. 94:6 (2013), 949-954
- [9] Ratner M. Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, Duke Math. J. 63 (1991), no. 1, 235-280.
- [10] Roy E. Poisson suspensions and infinite ergodic theory, Ergod. Th. Dynam. Sys. 29 (2009), 667-683.
- [11] Рыжиков В.В. Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1. Матем. сб., 198:5 (2007), 137-159.
- [12] Тихонов С.В. Аппроксимация перемешивающих преобразований. Матем. заметки. 95:2 (2014), 282-299.

E-mail: vryzh@mail.ru